প্রতিস্থাপনের সূত্র (Rule of Replacement)

যে নয়টি অনুমানের সূত্রের (Nine rules of inference) কথা বলা হল তারা কিন্তু আকারগত প্রমাণের ক্ষেত্রে যথেষ্ট নয়। এমন অনেক সত্যাপেক্ষক যুক্তি (truth functional argument) আছে যেগুলির কেবল ওই নয়টি নিয়মের সাহায্যে বৈধতার আকারগত প্রমাণ দেখানো যায় না। অতএব, দরকার হয় আরও অতিরিক্ত কিছু সূত্র।

এই সূত্রগুলির সাহায্যে প্রদত্ত হেতুবাক্যের বদলে তার সমার্থক বাক্য বসানো যায় এবং পূর্বোক্ত নয়টি নিয়মের সাহায্যে সিদ্ধান্ত বার করা যায়। সত্যাপেক্ষক যৌগিক যুক্তির (Truth functional compound argument) অংশগুলির পরিবর্তে যদি বচনগুলি বসানো হয় অর্থাৎ প্রতিস্থাপিত হয় তাতে যুক্তির অন্তর্গত মূল বচনের সত্যমূল্যের কোনো হেরফের ঘটে না কারণ **মূল বচন এবং প্রতিস্থাপিত বচন যৌক্তিক সমার্থক** (logically equivalent) অর্থাৎ বচন দুটির সত্যমূল্য এক (সত্যসারণীর সাহায্যে বোঝা যাবে)। যেমন ঃ S v T এই বচনের বদলে T v S এই বচনটি প্রতিস্থাপন করা যায় কারণ দুটি বচনের সত্যমূল্য এক তাই তারা যৌক্তিক সমার্থক।

যে সূত্রের সাহায্যে একটি বচনের স্থলে তারই সমমানের (যৌক্তিক সমমান) আর একটি বচন বসানো যায় তাকে প্রতিস্থাপনের সূত্র বলা হয় (The rule by which a statement can be replaced by another statement, logically equivalent to it, is called the Rule of Replacement)।

Copi এরকম দশটি প্রতিস্থাপনের সূত্রের (Rule of Replacement) কথা বলেছেন।

10. **De Morgan's theorem (DeM)**

$\sim (p \,.\, q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \,.\, \sim q)$

11. **Commutation (Com.)**

$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

$(p \,.\, q) \equiv (q \,.\, p)$

12. **Association (Assoc.)**
$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$
$[p \cdot (q \cdot r)] \equiv [(p \cdot q) \cdot r]$
13. **Distribution (Dist.)**
$[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$
$[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$
14. **Double Negation (D . N.)**
$p \equiv \sim \sim p$
15. **Transposition (Trans.)**
$(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$
16. **Material Implication (Impl.)**
$(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$
17. **Material Equivalence (Equiv.)**
$(p \equiv q) \equiv [(p \supset q) \cdot (q \supset p)]$
$(p \equiv q) \equiv [(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$
18. **Exportation (Exp.)**
$[(p \cdot q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$
19. **Tautology (Taut.)**
$p \equiv (p \vee p)$
$p \equiv (p \cdot p)$

এখানে প্রতিস্থাপনের সূত্রগুলির ক্রমিক সংখ্যা শুরু করা হয়েছে 10 থেকে কারণ আগের নয়টি অনুমানের সূত্রের পর থেকেই প্রতিস্থাপনের সূত্রকে ধরা হয়েছে যেহেতু এই 9 + 10 = 19টি নিয়মের সাহায্যেই যুক্তির বৈধতার আকারগত প্রমাণ দেওয়া হয়।

নীচে এই দশটি সূত্রের অর্থ বা বক্তব্য একটু ব্যাখ্যা করা হল। এতে সূত্রগুলিকে বুঝতে সুবিধা হবে এবং ফলে মনে রাখতে ও প্রয়োগ করতে সহজ হবে।

সূত্রগুলির ব্যাখ্যা

10. **De. M. (De Morgan's theorem)**
$\sim (p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$ (চ।)

(বিখ্যাত তর্কবিদ এবং গণিতবিদ De Morgan-এর নামে এই নিয়মের নামকরণ। প্রকৃতপক্ষে এই নিয়ম হল **সংযৌগিক বচনকে বৈকল্পিক বচনে** রূপান্তর করা এবং **বৈকল্পিক বচনকে সংযৌগিক বচনে** রূপান্তর করা অর্থাৎ ' . ' থেকে 'v' এ এবং 'v' থেকে ' . ' এ যাওয়ার উপায়। সূত্রটির বক্তব্য হল কোনো সংযৌগিক বচনের নিষেধ [~ (p . q)] হল একটি বৈকল্পিক বচন যার প্রত্যেকটি বিকল্পই এক একটি নিষেধক বচন [(~ p v ~ q)]। আবার কোনো বৈকল্পিক বচনের নিষেধ হল [~ (p v q)] কোনো সংযৌগিক বচন যার প্রত্যেকটি সংযোগী হল এক একটি নিষেধক বচন [(~ p . ~ q)]।)

11. **Com. (Commutation)**
$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$

এই নিয়মটি দুটি বচনের স্থান পরিবর্তন করতে সাহায্য করে। যেমন : (p v q) ≡ (q v p)—এখানে p-কে q-র জায়গায় এবং q-কে p-এর জায়গায় নিয়ে আসার উপায় এই সূত্র। তবে এই স্থান পরিবর্তন কেবল সংযৌগিক (.) ও বৈকল্পিক বচনের (v) ক্ষেত্রেই সীমাবদ্ধ।

যেহেতু এই নিয়মটি দুটি বচনের ক্রম (order) পরিবর্তনে সাহায্য করে তাই একে ক্রমান্তরকরণের সূত্র বলা হয়।

12. **Assoc. (Association)**

$$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$$

$$[p \cdot (q \cdot r)] \equiv [(p \cdot q) \cdot r]$$

এই নিয়মটি যূথীকরণ বা grouping-এ কাজ করে, যদি তিনটি বচন একই সম্পর্কে আবদ্ধ থাকে [(p . q) . r] তাহলে যে কোনো দুটিকে একত্র করে তৃতীয়টিকে আলাদা করা যেতে পারে যেমন—[p . (q . r)] অথবা [(p v q) v r] কে [p v (q v r)] ইত্যাদি। এখানেও সূত্রটি বৈকল্পিক (v) এবং সংযৌগিক (.) বচনের ক্ষেত্রে সীমাবদ্ধ। অর্থাৎ $p \supset (q \supset r)$-কে কখনও $(p \supset q) \supset r$ দিয়ে প্রতিস্থাপন করা যাবে না।

এই নিয়মটিকে **অনুষঙ্গের নিয়ম** বলা যেতে পারে।

13. **Dist. (Distribution)**

$$[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$$

$$[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$$

(এই নিয়মেরও উদ্দেশ্য হল সংযৌগিক বাক্যকে বৈকল্পিক বাক্যে রূপান্তর করা (বা বৈকল্পিক বাক্যকে সংযৌগিক বাক্যে রূপান্তর করা)। কিন্তু এখানে সংযোগীটিকে দুটি বিকল্পের মধ্যে ভাগ করে দেওয়া হয় (কিংবা বিকল্পটিকে দুটি সংযোগীর মধ্যে ভাগ করে দেওয়া হয়)।

(i) সংযোগীকে বিকল্পের মধ্যে ভাগ করে দেওয়া—যেমন : p . (q v r)। এখানে p একটি সংযোগী। q v r এই দুটি বিকল্পের মধ্যে p-কে ভাগ করে দেওয়া হল। পাওয়া গেল—(p . q) v (p . r)

(ii) বিকল্পকে সংযোগীর মধ্যে ভাগ করে দেওয়া—

যেমন : p v (q . r)—এখানে p একটি বিকল্প। q . r এই দুটি সংযোগীর মধ্যে p-কে ভাগ করে দেওয়া হল। পাওয়া গেল (p v q) . (p v r)।)

মনে রাখার সুবিধার জন্য এভাবে ভাবা যেতে পারে এ সূত্রে যে সংযোজকটি (Connective) মূল সংযোজক তা সমার্থক বচনে চলে আসে বন্ধনীর ভিতরে। আর বন্ধনীর (Bracket) ভিতরকার সংযোজক চলে যায় বন্ধনীর বাইরে অর্থাৎ মূল সংযোজকের জায়গায়। যেমন : p . (q v r)—এখানে ' . ' মূল সংযোজক, এবং v বন্ধনীর ভিতরকার সংযোজক। সমার্থক বচন (p . q) v (p . r)—p ' . ' এখানে চলে এল বন্ধনীর ভিতরে আর 'v' চলে গেল বন্ধনীর বাইরে মূল সংযোজক হয়ে। তেমনিভাবে p . (q v r) হয়ে গেল (p . q) v (p . r)।

(এই নিয়মের সুবিধা হল কোনো বচনকে প্রয়োজনমতো বাড়ানো যায়। যেমন— [p . (q v r) থেকে (p . q) v (p . r)-এ বাড়িয়ে নেওয়া গেল] আবার তেমনি কমানোও যায় [(p v q) . (p v r) থেকে simplification সূত্র দিয়ে শুধু p v q নিয়ে আসা হল]।)

Distribution সূত্রে একটি বচনকে অপর দুটি বচনের মধ্যে ভাগ করে দেওয়া হয় বলে একে **বণ্টনের সূত্রও** বলা হয়।

14. DN (Double Negation)

$$p \equiv \sim \sim p$$

একটি বচনকে নিষেধ করলে তার বিরুদ্ধ বচন পাওয়া যায়। আবার সেই বিরুদ্ধ বচনকে নিষেধ করলে মূল বচনেই ফিরে আসা যায়। সুতরাং কোনো বচন (p) এবং তার নিষেধের নিষেধ ($\sim \sim p$) একই অর্থ। এই কারণেই একটিকে অপরটির স্থলে বসানো যায়। Quine এই কারণেই নিষেধের নিষেধ (Double Negation)-কে স্বীকার করেননি যেহেতু তা মূল বচনের সমার্থক।

'নিষেধের দ্বিত্ব'-এ নামেও সূত্রটিকে বলা যেতে পারে।

15. Trans. (Transposition)

$$(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$$

এ সূত্রের অর্থ হল পূর্বগ অনুগকে প্রতিপাদন করে এ কথা বলাও যা—অনুগের নিষেধ পূর্বগের নিষেধকে প্রতিপাদন করে এ কথা বলাও তাই অর্থাৎ এ দুটি বক্তব্য সমার্থক। যদি p তাহলে q —এ কথা বলাও যা, যদি q না হয় তাহলে p হবে না—একথা বলাও এক। আসলে আমরা আগেই জেনেছি—প্রাকল্পিক বচনে স্বীকৃতির সময় আগে পূর্বগ, তারপর অনুগ। আর অস্বীকৃতির সময়—আগে অনুগ, তারপর পূর্বগ [MP, MT নিয়ম এ কথাই বলে]

এ সূত্রটিকে **ব্যবর্তনের সূত্রও** বলা যেতে পারে।

16. Impl. (Material Implication)

$$(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$$

(পূর্বগ অনুগকে প্রতিপাদন করে ($p \supset q$)—এ কথার অর্থ, হয়—পূর্বগ মিথ্যা হবে ($\sim p$) অথবা অনুগ সত্য হবে (q) অর্থাৎ $\sim p \vee q$। কোনো বস্তুগত প্রতিপত্তি (Material Implication, '$\supset$') সত্য হয় দুটি শর্তে—

(i) যদি প্রাকল্পিক বচনটির পূর্বগ মিথ্যা হয় অথবা,

(ii) যদি প্রাকল্পিক বচনটির অনুগ সত্য হয়।)

[আর এ কথার অর্থ হল—প্রাকল্পিক বচন কখনও এমন হবে না পূর্বগ সত্য, অনুগ মিথ্যা। অর্থাৎ $p \supset q$-র অর্থ হল—কখনও এমন হবে না p সত্য q মিথ্যা অর্থাৎ $\sim (p \cdot \sim q)$]

$(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$ (Transposition)—এখানে ($p \supset q$)-এর সমার্থক বচনটি $p \supset q$-এর সংজ্ঞা নয়।

কিন্তু $(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$ (Implication)—এখানে $p \supset q$-এর সমার্থক বচন $p \supset q$-এর সংজ্ঞা।

সূত্রটি 'বস্তুগত প্রতিপত্তি'র সূত্র।

17. Equiv. (Material Equivalence)

$$(p \equiv q) \equiv [(p \supset q) \cdot (q \supset p)]$$
$$(p \equiv q) \equiv [(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$$

এ সূত্রের বক্তব্য হল দুটি বচন তখনই সমার্থক হয় যখন (1) একে অপরকে প্রতিপাদন করে এবং (2) উভয়েরই সত্যমূল্য এক হয়।

(1) p q-এর সমার্থক ($p \equiv q$) যখন p q-কে প্রতিপাদন করে ($p \supset q$) এবং q p-কে প্রতিপাদন করে ($q \supset p$), অর্থাৎ ($p \supset q$) . ($q \supset p$)।

(2) আবার সত্যমূল্যের দিক থেকে p q-এর সমার্থক হয় ($p \equiv q$) যখন p ও q উভয়ই সত্য ($p \cdot q$) ($T \equiv T = T$) অথবা p ও q উভয়ই মিথ্যা ($\sim p \cdot \sim q$) ($F \equiv F = T$) অর্থাৎ ($p \cdot q$) v ($\sim p \cdot \sim q$)।

18. **Exp. (Exportation)**

$$[(p \cdot q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$$

এখানে p . q পূর্বগকে লঘু করে p-তে আনা হয়েছে আর পূর্বগের অপর অংশ q-কে রপ্তানি করা হয়েছে অনুগ r-এর ঘরে। আমরা একই সংযোজক যুক্ত তিনটি বচনের মধ্যে একটিকে অপর দুটি থেকে আলাদা করতে পারি Association-এর সাহায্যে—যেমন $[p \cdot (q \cdot r)]$ v $[(p \cdot q) \cdot r]$ ['v'-এর ক্ষেত্রেও একই] কিন্তু দুটো ভিন্ন সংযোজক যুক্ত বচন ($\supset$, .)-এর ক্ষেত্রে তিনটি বচনের মধ্যে একটিকে আলাদা করার উপায় এই সূত্রটি [($p \cdot q$) $\supset$ r-এর থেকে p-কে আলাদা করা যায়। আবার $p \supset (q \supset r)$ এখানেও r-কে আলাদা করে নেওয়া যায়]।

($p \cdot q$) $\supset r$ থেকে $p \supset (q \supset r)$ করার সময় যেহেতু পূর্বগটি লঘু হয়ে p-তে পরিণত হয় তাই এই সূত্রটির নাম **'পূর্বগ লঘুকরণ সূত্র'**।

19. **Taut. (Tautology)**

$$p \equiv (p \vee p)$$

$$p \equiv (p \cdot p)$$

(যে কোনো বাক্যকে ' . ' দিয়ে অথবা 'v' দিয়ে পুনরাবৃত্তি করলে মূল বচনই পাওয়া যায়। যেমন p-কে যদি ' . ' দিয়ে পুনরাবৃত্তি করা হয় p . p তাহলে সেটি p-ই বোঝায়। আবার p v p বলাও p-এরই নামান্তর। অর্থাৎ যে কোনো বাক্য তার নিজের সাথে ' . ' অথবা 'v' সম্বন্ধে আবদ্ধ।)

উপরের এই দশটি সূত্রই যৌক্তিক সমার্থতার (logical equivalance) সূত্র। অর্থাৎ যে দুটি বচনের মধ্যে সমার্থতা তাদের সত্যমূল্য এক।

মনে রাখার সুবিধার জন্য আবারও বলা হল যে এখানে প্রতিস্থাপনের সূত্র (Rule of replacement)-এর ক্রমিক সংখ্যা 10 থেকে শুরু করা হয়েছে কারণ অনুমানের যে নয়টি সূত্র (Nine rules of inference) আছে সেগুলিকে এই দশটি সূত্রের আগে যুক্ত করা হয়েছে। এই দু'প্রকার সূত্র মিলিয়ে মোট 19টি সূত্র ('Nineteen rules' কথাটিও ব্যবহার করা হয়) দিয়েই যুক্তির বৈধতার আকারগত প্রমাণ দেওয়া হয়।